Modul MKP-zemětřeseni - Teoretické základy

1. Základní rovnice metody konečných prvků s uvážením seismicity

Základní rovnici vynuceného kmitání soustavy s N stupni volnosti zapíšeme ve tvaru

$$\mathsf{M}\ddot{\boldsymbol{r}}(t) + \mathsf{C}\dot{\boldsymbol{r}}(t) + \mathsf{K}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{F}(t)\,, \tag{1}$$

Rovnice (1) představuje soustavu N diferenciálních pohybových rovnic druhého řadu, kde $\dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ a $\ddot{r} = \dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$ vyjadřují rychlost a zrychlení ve směru i-tého stupně volnosti ($i = 1, \ldots, N$). V případě metody konečných prvků (MKP) představuje vektor $\boldsymbol{r}$ vektor neznámých uzlových posunutí. Matice M, C a K reprezentují matici hmotnosti, tlumení a tuhosti konstrukce. Vektor $\boldsymbol{F}$ je vektor vnějšího uzlového zatížení.

Aktuální verze programu GEO5 MKP se omezuje pouze na posouzení účinků zemětřesení reprezentovaného předepsaným zrychlením podpovrchových podélných (tlakových P) a příčných (smykových S) vln. Přitom se předpokládá, že tyto vlny se šíří od spodní hranice numerického modelu směrem k povrchu. Výsledné pole zrychlení v prostoru a čase $\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t)$[1] lze v tomto případě s výhodou vyjádřit jako součet zrychlení předepsaného všem uzlům numerického modelu $\overline{\boldsymbol{a}}(t)$ a jeho relativní odchylky $\ddot{\boldsymbol{u}}_R(\boldsymbol{x}, t)$

$$\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t) = \overline{\boldsymbol{a}}(t) + \ddot{\boldsymbol{u}}_R(\boldsymbol{x}, t). \tag{2}$$

1.1. Způsob zavedení zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}(t)$ do výpočtu

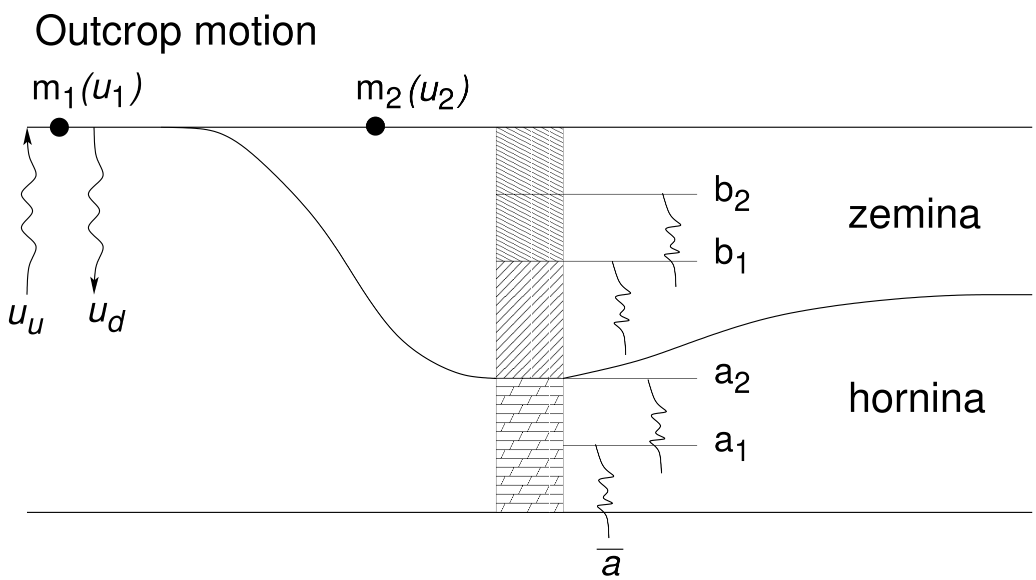
Celkový posun v libovolném místě modelu je roven součtu posunu u_u příslušný vlně, která se šíří směrem nahoru a posunu u_d příslušný vlně, která se šíří směrem dolů, tedy

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}_u(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{u}_d(\boldsymbol{x}, t). \tag{3}$$

Seismické pohyby jsou zpravidla monitorovány na volném povrchu. V takovém případě hovoříme o tzv. *outcrop motion*, viz obr. 1. Abychom však byli schopni metodou konečných prvků predikovat zrychlení změřené na terénu, je nutné zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}(t)$, které předepisujeme na spodní hranici modelu, vhodným způsobem upravit v závislosti na typu vrstevnatého podloží.

V případě, kdy záznam je pořízen v bodě m_1 a spodní hranici modelu uvažujeme buď v hornině (bod a_1) nebo na rozhraní zeminy a horniny (bod a_2) by bylo zřejmě přípustné uvažovat

[1] V případě 2D úlohy představuje vektor $\boldsymbol{u} = \{\mathsf{u}, \mathsf{v}\}$ posuny ve směru souřadnicových os x, y.



Obrázek 1: Zavedení zrychlení do modelu.

$\overline{\boldsymbol{a}}_{a1,2} \approx \ddot{\boldsymbol{u}}_1$.[2] V případě hranice uvažované v bodech b_1 a b_2 se však hodnota posunu $\boldsymbol{u}_{b1,2}$ od hodnoty posunu, a to jak $\boldsymbol{u}_1$ tak i $\boldsymbol{u}_2$, může výrazně lišit, tedy $\overline{\boldsymbol{a}}_{b1,2} \neq \ddot{\boldsymbol{u}}_{1,2}$. Pro bod m_2 lze navíc předpokládat, že $\overline{\boldsymbol{a}}_{a1,2} \neq \ddot{\boldsymbol{u}}_2$. Pro spravné nastavení předepsaného zrychlení lze použít například program SHAKE [1]. Další podrobnosti lze nalézt v [2].

1.2. Definice okrajových podmínek na spodní hranici modelu

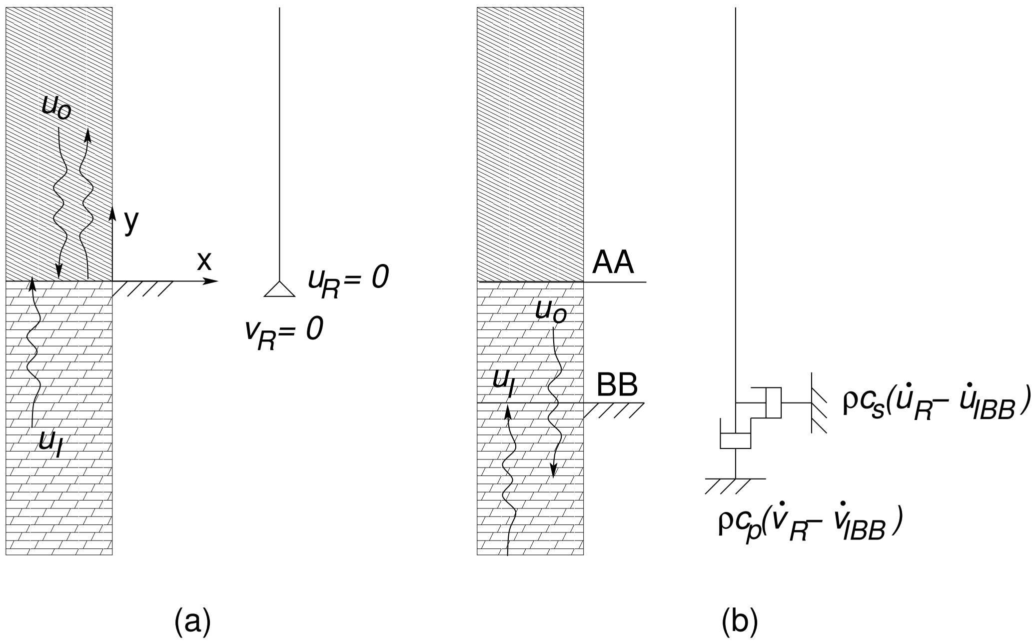
Vzhledem k tomu, že na volném povrchu jsou amplitudy příchozí vlny a odražené vlny shodné, lze celkový posun na povrchu terénu vyjádřit jako dvojnásobek posunu příchozí vlny $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = 2\boldsymbol{u}_u(\boldsymbol{x}, t)$. Pro obecný bod uvnitř modelu platí rov. (3). Omezíme-li se na spodní hranici modelu, lze tuto rovnici zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{BB}} = \boldsymbol{u}_I(\boldsymbol{x}, t)|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{BB}} + \boldsymbol{u}_O(\boldsymbol{x}, t)|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{BB}}, \tag{4}$$

kde BB označuje spodní hranici modelu, $\boldsymbol{u}_I$ a $\boldsymbol{u}_O$ reprezentují příchozí vlnu (vlnu, která do modelu vstupuje), respektive odchozí vlnu (vlnu, která model opouští).

Předchozí vztahy nyní využijeme při definici předepsaného zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$ v závislosti na volbě okrajových podmínek předepsaných na spodní hranici modelu. Program GEO5 MKP umožňuje definovat dva typy okrajových podmínek, a to pevné okrajové podmínky a absorpční okrajové podmínky.

[2]Rychlost šíření seismické vlny je úměrná tuhosti prostředí, kterým se vlna šíří. V hornině může být tedy oproti zemině rychlost šíření vlny řádově vyšší.



Obrázek 2: a) Pevné (kinematické) okrajové podmínky, b) Absorpční (silové) okrajové podmínky.

1.2.1. Pevné okrajové podmínky

Pevnou okrajovou podmínku lze spolehlivě aplikovat pouze v případě, že spodní hranice modelu se nachází na rozhraní velmi tuhé horniny a měkké zeminy. V takovém případě se příchozí vlna "zcela" odrazí zpět do modelu. S ohledem na rovnice (4) a (2) lze tudíž psát

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}(t)|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{BB}} + \boldsymbol{u}_R(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{u}_R(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{BB}}, t) = 0, \quad \overline{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{u}}(t)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{BB}}. \tag{5}$$

Jak je také patrné z obr. 2(a), je hodnota relativního posunu podél spodní hranice modelu BB rovna nule. Podél této hranice tedy předepisujeme kinematické okrajové podmínky. Velikost předepsaného zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$ odpovídá zrychlení celkového posunu, viz rov. (3), v místě hranice BB. Připomeňme, že v případě monitorovacího bodu m_1 a spodní hranice modelu v bodě a_2 na obr. 1 lze hodnotu předepsaného zrychlení uvažovat rovnu *outcrop motion* $\overline{\boldsymbol{a}} \approx \ddot{\boldsymbol{u}}_1$.

1.2.2. Absorpční okrajové podmínky

Uvažujme obr. 2(b), tudíž spodní hranici modelu uvnitř vrstvy pod rozhraním AA. Hodnotu posunu v libovolném bodě vrstvy mezi rozhraními AA a BB můžeme v souladu s rovnicemi (3) a (2) zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}_I(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{u}_O(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}_{IBB}(t) + \boldsymbol{u}_R(\boldsymbol{x},t), \tag{6}$$

kde $\boldsymbol{u}_{IBB}$ představuje příchozí vlnu v místě hranice BB. Vzhledem k tomu, že toto rozhraní je uvnitř homogenní vrstvy, tak odchozí vlna touto hranicí pouze projde. Teoretický model předpokládá, že poloprostor pod hranicí BB je nekonečný, tudíž tato vlna se již ve výpočtu nijak neprojeví a je nutné ji na rozhraní BB utlumit.

Odchozí vlna $\boldsymbol{u}_O$

$$\boldsymbol{u}_O(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}_{IBB}(t) + \boldsymbol{u}_R(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{u}_I(\boldsymbol{x},t), \tag{7}$$

vyhovuje na hranici BB radiační podmínce

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial u_O(\boldsymbol{x},t)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_O(\boldsymbol{x},t)}{\partial y} \end{array} \right\}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{BB}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{c_s} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{c_p} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\mathrm{d}u_O(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v_O(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{d}t} \end{array} \right\}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{BB}}, \tag{8}$$

kde c_p a c_s představují rychlosti šíření P a S vln ve tvaru

$$c_p = \sqrt{\frac{E_{oed}}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{9}$$

kde ρ, E_{oed}, G vyjadřují hustotu, edometrický modul a smykový modul dané vrstvy podloží. S odkazem na rovnice (6) a (2) je však nutné vyjádřit podmínku (8) v závislosti na relativním posunu $\boldsymbol{u}_R$. Postup popsaný v [3] vede na statickou (silovou) okrajovou podmínku ve tvaru

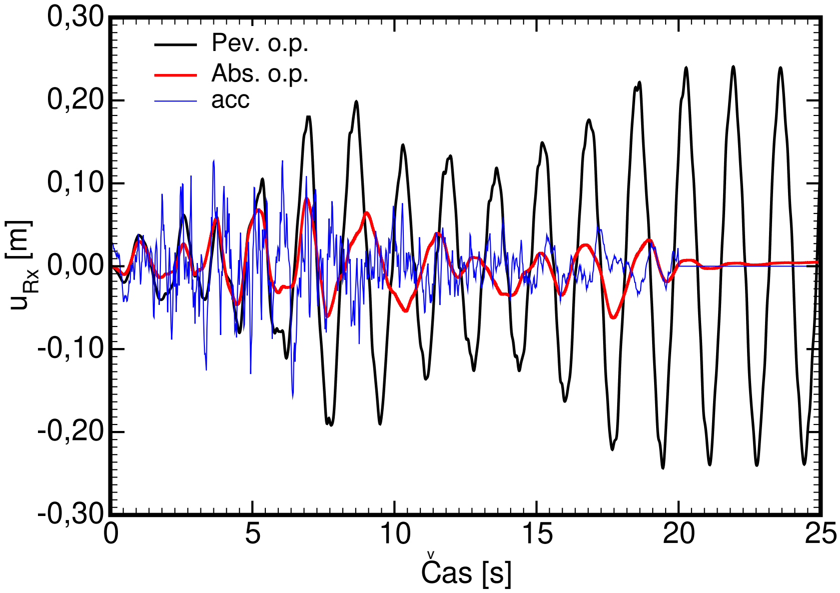
$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \overline{p}_x = \tau_{xy} \\ \overline{p}_y = \sigma_y \end{array} \right\}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{BB}} &= \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & E_{oed} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial u_R(\boldsymbol{x},t)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_R(\boldsymbol{x},t)}{\partial y} \end{array} \right\}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{BB}} \\ &= \begin{bmatrix} \rho c_s & 0 \\ 0 & \rho c_p \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\mathrm{d}u_R(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}u_{IBB}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v_R(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}v_{IBB}(t)}{\mathrm{d}t} \end{array} \right\}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{BB}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Graficky je tato podmínka znázorněna na obr. 2(b) ve formě tlumiče s viskozitou ρc_s, resp. ρc_p. Pro předepsané zrychlení s odkazem na rovnice (6) a (2) platí

$$\overline{\boldsymbol{a}}(t) = \ddot{\boldsymbol{u}}_{IBB}(t). \tag{11}$$

Pokud se tedy omezíme v obr. 1 na případ monitorovacího bodu m_1 a spodní hranice modelu v bodě a_1 lze hodnotu zrychlení uvažovat přibližně rovnu polovině hodnoty zrychlení příslušné *outcrop motion*, tedy $\overline{\boldsymbol{a}} \approx \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{u}}_1$.

Stojí také za zmínku, že definice absorpčních okrajových podmínek předpokládá, že vrstva obsahující hranici BB se chová lineárně pružně. Nelineární chování by mělo být tedy omezeno pouze na vrchní vrtsvy podloží.



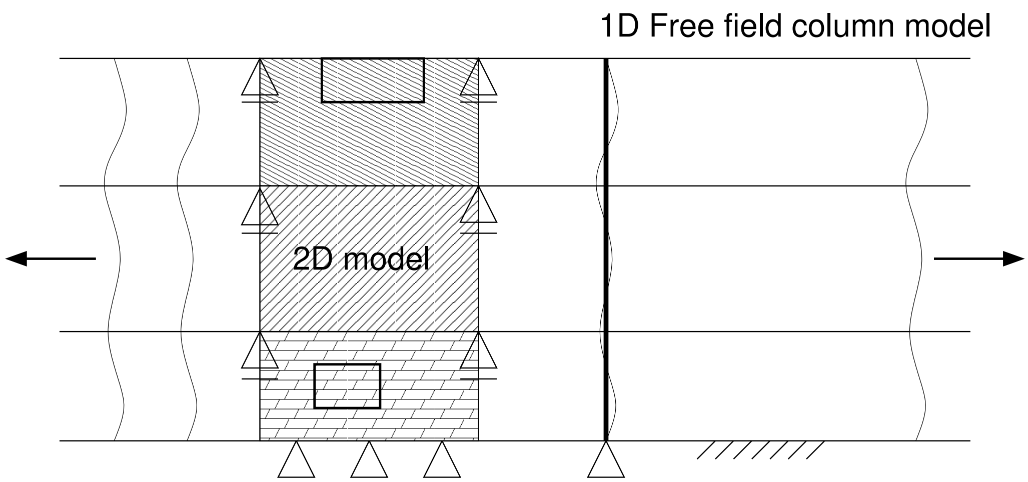
Obrázek 3: Porovnání odezvy homogenní vrstvy při použití pevných a absorpčních okrajových podmínek.

Na obr. 3 je pro zajímavost porovnán průběh vodorovného posunu na povrchu homogenní vrstvy mocné 50 m zatížené předepsaným vodorovným zrychlením při použití pevných a absorpčních okrajových podmínek. Je zřejmé, že v případě pevných okrajových podmínek je odchozí vlna uvězněna v modelu. Neuvážíme-li tedy materiálový útlum, bude systém kmitat i po úplném odeznění zatížení. V případě absorpčních okrajových podmínek je zřejmé, že odchozí vlna je utlumena a po odeznění zatížení kmitání systému postupně ustane. Podrobnější studie vlivu okrajových podmínek zavedených na spodní hranici modelu je k dispozici v [4, 5].

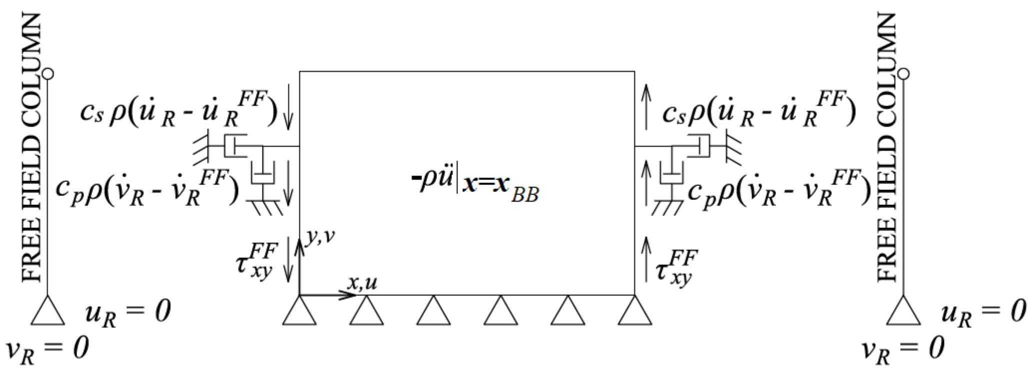
1.3. Definice okrajových podmínek podél boční hranice modelu

Předpokládejme, že geometrické i fyzikální vlastnosti podloží se v horizontálním směru nemění, viz obr. 4. V takovém případě bude odezva systému na předepsané seismické zatížení v každém svislém řezu stejná. To odpovídá tzv. Free field podmínkám a pro řešení úlohy lze uvažovat jednorozměrný (1D) *Free field column* (FF) model.

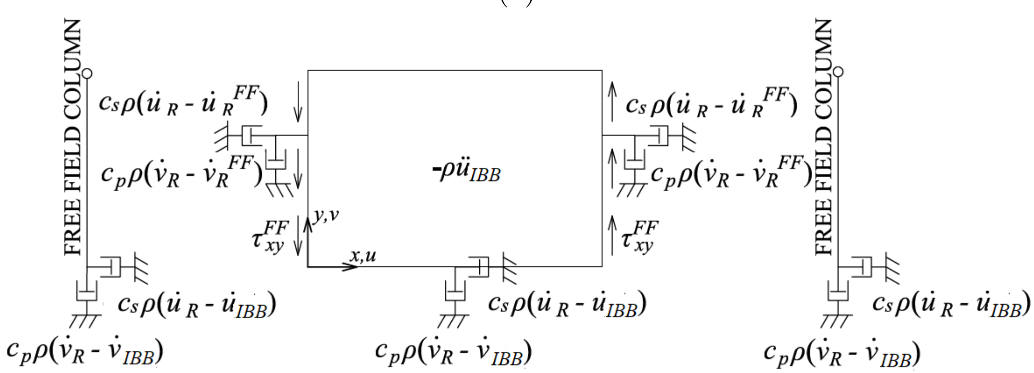
Řešení této úlohy s uvážením dvourozměrného (2D) modelu, který je v horizontálním směru omezen svislými hranicemi (LB), viz obr. 4, vyžaduje na těchto hranicích zavedení vhodných okrajových podmínek, které zajistí, že odezvy predikované 1DFF modelem a 2D modelem budou shodné. Ve speciálním případě, kdy předpokládáme zatížení pouze příčnými S vlnami, by standardní kinematické okrajové podmínky na obr. 4 byly postačující. V případě kombinace P a S vln to však již možné není. V tomto obecném případě se osvědčila statická okrajová podmínka, kdy na svislé hranici předepisujeme svislé povrchové síly odpovídající smykovému



Obrázek 4: 2D nekonečný pás podloží a 1D Free field model.



(a)



(b)

Obrázek 5: Okrajové podmínky na svislých okrajích modelu s uvážením a) pevné a b) absorpční okrajové podmínky na spodní hranici. 1D Free field column model a 2D model.

napětí τ_{xy}^{FF} generovaného FF analýzou, jak je naznačeno na obr. 5.

Pokud budou Free field podmínky narušeny např. zářezem, výrubem apod. (obr. 4), bude nutné příchozí vlny odpovídající rozdílu skutečné a FF analýzy na svislé hranici utlumit. To zajistíme, podobně jako v případě absorpční okrajové podmínky na spodní hranici modelu (podkapitola 1.2), zavedením radiační (statické) okrajové podmínky, jak je opět patrné z obr. 5[3]. Další podrobnosti lze nalézt v [3]. Podrobná studie vlivu okrajových podmínek předepsaných na svislých LB hranicích byla provedena v [4].

V případě pevných okrajových podmínek a s uvážením 2D úlohy, obr. 5(a), zapíšeme výslednou formu rov. (1) ve tvaru

$$\begin{aligned} & \mathsf{M}\ddot{\boldsymbol{u}}_R + \mathsf{C}^{\mathsf{M}}\dot{\boldsymbol{u}}_R + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_R + \mathsf{C}^{\mathsf{LB}}\dot{\boldsymbol{u}}_R|_{x=0,L} \\ & = -\mathsf{M}\ddot{\boldsymbol{u}}_0 - \mathsf{C}^{\mathsf{M}}\dot{\boldsymbol{u}}_0 + \mathsf{C}^{\mathsf{LB}}\dot{\boldsymbol{u}}_R^{FF}|_{x=0,L} - \boldsymbol{R}_\tau|_{x=0} + \boldsymbol{R}_\tau|_{x=L}, \end{aligned} \tag{12}$$

kde $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_{BB}})$. V případě absorpčních okrajových podmínek, obr. 5(b), přejde rov. (1) na tvar

$$\begin{aligned} & \mathsf{M}\ddot{\boldsymbol{u}}_R + \mathsf{C}^{\mathsf{M}}\dot{\boldsymbol{u}}_R + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_R + \mathsf{C}^{\mathsf{BB}}\dot{\boldsymbol{u}}_R|_{y=0} + \mathsf{C}^{\mathsf{LB}}\dot{\boldsymbol{u}}_R|_{x=0,L} \\ & = -\mathsf{M}\ddot{\boldsymbol{u}}_{IBB} - \mathsf{C}^{\mathsf{M}}\dot{\boldsymbol{u}}_{IBB} + \mathsf{C}^{\mathsf{BB}}\dot{\boldsymbol{u}}_{IBB}|_{y=0} + \mathsf{C}^{\mathsf{LB}}\dot{\boldsymbol{u}}_R^{FF}|_{x=0,L} - \boldsymbol{R}_\tau|_{x=0} + \boldsymbol{R}_\tau|_{x=L}. \end{aligned} \tag{13}$$

Matice tlumení se tedy rozpadne na účinky materiálového útlumu (C^{M}) a absorpční účinky na hranicích BB (C^{BB}), resp. LB (C^{LB}). Zatížení $\boldsymbol{F}(t)$ odpovídá účinku předepsaných setrvačných sil, první člen na pravé straně rovnic (12) a (13).

1.4. Přímá integrace pohybových rovnic

Výpočet vektoru neznámých posunů $\boldsymbol{r}$ vyžaduje časovou integraci rov. (1)[4]. Program GEO5 MKP využívá implicitní Newmarkovu metodu udávající vztah mezi vektorem posunutí, rychlosti a zrychlení v integračním kroku $n+1$, pokud známe tyto veličiny v kroku n, následovně [6, 7]

$$\boldsymbol{r}_{n+1} = \boldsymbol{r}_n + \Delta t \dot{\boldsymbol{r}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\left[(1-2\beta)\ddot{\boldsymbol{r}}_n + 2\beta\ddot{\boldsymbol{r}}_{n+1}\right], \tag{14}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{r}}_n + \Delta t\left[(1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{r}}_n + \gamma\ddot{\boldsymbol{r}}_{n+1}\right], \tag{15}$$

kde Δt představuje délku integračního kroku a β, γ jsou parametry metody pro vyjádření vektoru posunutí, resp. rychlosti. V souladu s přírustkovým řešením standardní statické úlohy napjatosti převedeme rovnice (14) a (15) zavedením přírustku vektoru posunutí $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{n+1}$ na

[3] Vlny, které se směrem k hranici šíří pod určitým úhlem různým od 90°, budou utlumeny jen přibližně.

[4] V případě programu GEO5 MKP řešíme rov. (12) nebo (13) pro neznámý vektor posunutí $\boldsymbol{u}_R$

tvar

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}_{n+1} &= b_1\Delta\boldsymbol{r} - b_2\dot{\boldsymbol{r}}_n - b_3\ddot{\boldsymbol{r}}_n, \qquad (16)\\ \dot{\boldsymbol{r}}_{n+1} &= b_4\Delta\boldsymbol{r} - b_5\dot{\boldsymbol{r}}_n - b_6\ddot{\boldsymbol{r}}_n, \qquad (17)\\ \boldsymbol{r}_{n+1} &= \boldsymbol{r}_n + \Delta\boldsymbol{r}. \qquad (18)\end{aligned}$$

kde parametry $b_1 - b_6$ jsou vyjádřeny následovně

$$\begin{aligned} &b_1 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}, \qquad b_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}, \qquad b_3 = \frac{1-2\beta}{2\beta},\\ &b_4 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, \qquad b_5 = \frac{\gamma}{\beta} - 1, \qquad b_3 = \frac{\gamma - 2\beta}{2\beta}\Delta y. \end{aligned} \tag{19}$$

S využitím předchozích rovnic získáme přírustkový tvar rovnice (1)

$$\left(b_1\mathbf{M} + b_4\mathbf{C} + \mathbf{K}^k\right)\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}_{n+1} + \left(b_2\mathbf{M} + b_5\mathbf{C}\right)\dot{\boldsymbol{r}}_n + \left(b_3\mathbf{M} + b_6\mathbf{C}\right)\ddot{\boldsymbol{r}}_n - \boldsymbol{R}^k, \tag{20}$$

kde $\boldsymbol{F}_{n+1}$ vyjadřuje zatížení v $n+1$ integračním kroku a $\boldsymbol{R}^k$ ($\boldsymbol{R}^0 = \boldsymbol{R}_n$) je vektor vnitřních sil v k-té iteraci daného integračního kroku. Parametry β, γ lze zvolit tak, aby metoda byla stabilní. V případě, že stabilita řešení nezávisí na velikosti časového kroku, je metoda *nepodmíněně stabilní*. Pro tento případ platí [7]

$$2\beta \leq \gamma \leq \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Nejčastejší volba je

$$\beta = \frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \tag{22}$$

což vede na *metodu průměrného konstantního zrychení*. Toto nastavení je obecně doporučeno.

Zatím jsme se příliš nevěnovali přesnosti řešení. V [7] je přesnost řešení diskrétní úlohy (řešení je aproximováno konečným počtem stupňů volnosti v zavislosti sítí konečných prvků) vztaženo k parametru $\bar{\xi} = \xi + \mathrm{AD}$ (poměrný algoritmický útlum) a $RPE = \dfrac{\overline{\mathrm{T}} - \mathrm{T}}{\mathrm{T}}$ (relativní chyba periody), kde parametr ξ je součinitel poměrného útlumu (viz kapitola 4), AD vyjadřuje pokles amplitudy daný algoritmem časové integrace, T je skutetečná perioda kmitání a $\overline{\mathrm{T}}$ je perioda kmitání diskrétní úlohy. V případě, že $\gamma = \dfrac{1}{2}$, platí AD=0. Pokles výchylky v čase, nebudeme-li uvažovat absorpční okrajové podmínky, je tedy řízen pouze materiálovým útlumem (matice $\mathbf{C}^{\mathsf{M}}$ např. v rov. (12)) daným nastavenou hodnotou parametru ξ.

Ukazuje se však, že v případě diskrétní úlohy je hodnota parametru AD $\neq 0$ žádoucí z důvodu eliminace účinku vyšších módů kmitání, které jsou jen určitým artefaktem daným diskretizací úlohy. V případě Newmarkovy meody se jako nejvhodnější řešení jeví algoritmus představený v [8] pod názvem α-Metoda. Při použití této metody převedeme rov. (20) na tvar

$$\begin{aligned}
&\left[b_1\mathbf{M} + (1+\alpha)b_4\mathbf{C} + (1+\alpha)\mathbf{K}^k\right]\Delta\boldsymbol{r} = \qquad (23)\\
&\boldsymbol{F}_{n+1} + \left[b_2\mathbf{M} + ((1+\alpha)b_5+\alpha)\,\mathbf{C}\right]\dot{\boldsymbol{r}}_n + \left[b_3\mathbf{M} + (1+\alpha)b_6\mathbf{C}\right]\ddot{\boldsymbol{r}}_n - \boldsymbol{R}^k,
\end{aligned}$$

kde $t_{n+\alpha} = t_{n+1} + \alpha\Delta t$. Pokud položíme $\alpha = 0$, přejdeme opět k rovnici (20).

Pro parametry α, β, γ platí

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right], \quad \beta = \frac{1-\alpha^2}{4}, \quad \gamma = \frac{1-2\alpha}{2}. \qquad (24)$$

Metoda je v takovém případě nepodmíněně satbilní a její přesnost je druhého řádu. Účinek numerického útlumu klesá s rostoucí hodnotou α. Pro $\alpha = 0$ dostaneme $\gamma = \dfrac{1}{2}$, tedy AD=0.

Jak metoda průměrného konstantního zrychení, tak i α-metoda jsou metody nepodmíněně stabilní. Zvolený časový integrační krok tak řídí přesnost řešení. To je do značné míry ovlivněno materiálovými vlastnostmi a typem sítě (typ a velikost prvku, nerovnoměrné zahuštění). V případě obecné úlohy tak nelze optimální velikost kroku jednoznačně stanovit.

V případě podmíněně stabilní Newmarkovy metody, kdy $\gamma \leq \dfrac{1}{2}$, $\beta \leq \gamma$, musí časový integrační krok Δt splňovat podmínku [7]

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit}, \quad \Delta t_{crit} = \frac{\Omega_{crit}}{\omega_{eq}}, \qquad (25)$$

$$\Omega_{crit} = \frac{\xi\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) + \left[\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{\gamma}{2} - \beta}, \qquad (26)$$

kde Ω_{crit} je kritická vzorkovací frekvence a ω_{eq} je maximální vlastní frekvence diskrétního problému, kterou lze omezit maximální vlastní frekvencí jednotlivých prvků. Nejčastěji používanou podmíněně stabilní metodou je *metoda centrální diference* kdy $\beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$ a pro $\xi = 0$ je $\Omega_{crit} = 2$. V případě, kdy matice hmotnosti i tlumení jsou diagonální, tak metoda centrální diference je explicitní. Pro minimalizaci chyby periody se doporučuje kombinovat metodu centrální diference s diagonální maticí hmotnosti (matice soustředěných hmotností). Naopak metodu konstantního přírustku zrychlení je vhodné kombinovat s konzistentní maticí hmotnosti [7]. Vzhledem k tomu, že program GEO5 MKP pracuje pouze s konzistentní maticí hmostnosti, tak použití metody centrální diference se nedoporučuje.

Přehled Δt_{crit} pro 1D lineární a kvadratické tyčové prvky, a to jak pro matici soustředěných hmotmostí, tak i konzistentní matici hmotnosti jsou uvedeny např. v [7]. Další příklady odhadů

Δt_{crit} jsou uvedeny v [9]. Program PLAXIS [10] využívá pro troúhelníkové prvky vyššího řádu odhady Δt_{crit} prezentované v [11].

Na závěr poznamenejme, že v případě zemětřesení je maximální délka kroku řízena záznamem zrychlení, které většinou předpokládá vzorkování v intervalu $\Delta t \in [0.005, 0.01]$ s.

2. Výpočet vlastních tvarů a vlastních frekvencí

Program GEO5 MKP umožňuje výpočet vlastních tvarů a frekvencí systému řešením obecného problému vlastních čísel ve tvaru

$$\left(\mathbf{M} - \omega_\alpha^2 \mathbf{K}\right) \boldsymbol{\phi}_\alpha = \mathbf{0}, \tag{27}$$

tedy bez uvažování materiálového útlumu. Vektor $\boldsymbol{\phi}_\alpha$ představuje vlastní tvar kmitání příslušný vlastní frekvenci ω_α. Vlastní tvary jsou během výpočtu normovány vzhledem k matici hmotnosti

$$\overline{\boldsymbol{\phi}}_\alpha = \frac{\boldsymbol{\phi}_\alpha}{\left[\boldsymbol{\phi}_\alpha^{\mathsf{T}} \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_\alpha\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{rozměr } \left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]. \tag{28}$$

Pro účely vykreslování jsou vlastní tvary dále normovány maximální celkovou hodnotou posunu v uzlu (k-číslo uzlu , Nn-celkový počet uzlů)

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\phi}}}_\alpha = \frac{\overline{\boldsymbol{\phi}}_\alpha}{A_\alpha^{max}} \; [-], \qquad A_\alpha^{max} = \max_{k=1}^{Nn} \left(\sqrt{(\phi_{\alpha,k}^x)^2 + (\phi_{\alpha,k}^y)^2}\right). \tag{29}$$

Program GEO5 MKP řeší úlohu vlastního kmitání, rov. (27), pro zadaný počet nejnižších vlastních frekvencí užitím standardní metody inverzní iterace podprostoru [6, 7, 12]. Při řešení této úlohy lze volit buď Jacobiho metodu rotací, nebo Gram Schmidtovu ortogonalizaci. V případě Jacobiho metody rotací se v každém iteračním kroku řeší redukovaný problému vlastních čísel. Tento výpočet je však velmi efektivní a požadovaný počet iteračních kroků řešení rov. (27) je zpravidla nižší, než v případě Gram Schmidtovy ortogonalizace. V případě Jacobiho metody však není zcela zajištěno, že metoda vždy nalezne požadovaný počet prvních K vlastních frekvencí.

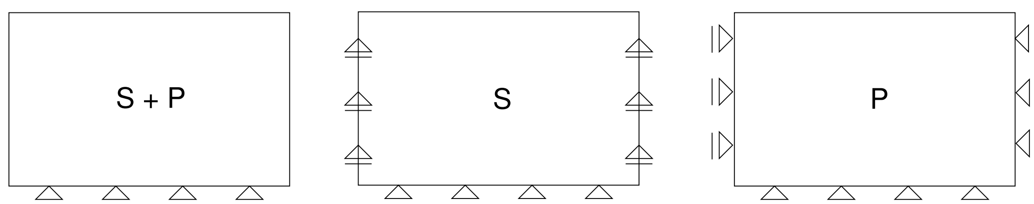
V závislosti na nastavení výpočtu daný zvolenou metodou, počtem iterací a požadovanou přesností mohou nastat následující varianty výsledku řešení:

1. Úspěšné řešení - počet nalezených vlastních frekvencí s chybou menší než zadaná je roven počtu [5] požadovaných vlastních frekvencí.

[5] V případě Jacobiho metody rotací může být tento počet i vyšší, viz [6].

2. Částešně úspěšné řešení - počet nalezených vlastních frekvencí s chybou menší než zadaná je menší než počet požadovaných. V textovém souboru však program zobrazí i zbývající vlastní frekvence nalezené s chybou větší než zadaná a chybu řešení příslušnou nejvyšší vlastní frekvenkci. Tento stav většinou nastává v důsledku překročení nastaveného počtu iterací.
3. Neúspěšné řešení - program nenalezl žádnou vlastní frekvenci.

Program navíc podává informaci o možném vynechání některé z vlastních frekvencí v seznamu vypočtených. V takové případě se doporučuje zvolení jiné varianty metody výpočtu, případně zmenšení chyby výpočtu.



Obrázek 6: Kinematické okrajové podmínky uvažované při řešení úlohy vlastního kmitání.

Při výpočtu vlastních tvarů a frekvencí umožňuje program GEO5 MKP uvažovat tři typy podepření dle obr. 6. V prvním případě (S+P) nebereme v úvahu mód vlastního kmitání. Ve druhém a třetím případě na druhou stranu preferujeme módy příslušné horizontálnímu (S) a vertikálnímu (P) kmitání. V každém případě je však při výběru požadovaného tvaru kmitání, např. pro výpočet parametrů materiálového útlumu popsaný v kapitole 4, vhodná vizuální kontrola. Dalším vodítkem pro výběr vlastního tvaru kmitání mohou být parametry *Modální faktor podílu vlastního tvaru* a *Modální efektivní hmotnost vlastního tvaru.*

2.1. Modální faktor podílu vlastního tvaru

Omezíme se pouze na 2D úlohu rovinné deformace bez uvažování rotačních stupňů volnosti. Modální faktor podílu vlastního tvaru $\Gamma_{\alpha,i}$

$$\Gamma_{\alpha,i} = \frac{\{\overline{\phi}_\alpha\}^\mathsf{T} [\mathsf{M}] \{\mathsf{I}_\mathsf{i}\}}{m_\alpha} \qquad \text{rozměr } \left[\sqrt{t}\right], \tag{30}$$

vyjadřuje, jak silně je kmitání ve směru příslušné souřadnicové osy x, y vlastním tvarem $\{\phi_\alpha\}$ reprezentováno. Vektor $\{\mathsf{I}_\mathsf{i}\}$ je příčinkový vektor příslušný buď vodorovné ($i \equiv x, \{\mathsf{I}_\mathsf{x}\}^\mathsf{T} = \{1,0,1,0,\ldots,1,0\}$) nebo svislé ($i \equiv y, \{\mathsf{I}_\mathsf{y}\}^\mathsf{T} = \{0,1,0,1,\ldots,0,1\}$) složce kmitání. Zobecněná hmotnost m_α je dána vztahem

$$m_\alpha = \{\overline{\phi}_\alpha\}^{\mathsf{T}} [\mathsf{M}] \{\overline{\phi}_\alpha\} \quad [-]. \tag{31}$$

Jak již bylo řečeno jsou v programu GEO5 MKP vlastní tvary normované vzhledem k matici hmotnosti, tedy $m_\alpha = 1$.

2.2. Modální efektivní hmotnost vlastního tvaru

Dalším parametrem vyjadřujícím příslušnost (důležitost) daného tvaru k vodorovné a svislé složce kmitání je efektivní modální hmotnost vlastního tvaru

$$m_{\alpha,i} = (\Gamma_{\alpha,i})^2 \, m_\alpha \qquad \text{rozměr } [t]. \tag{32}$$

Tento parametr lze využít k určení minimálního počtu vlastních tvarů, které bychom měli vzít v úvahu např. při řešení rov. (1) metodou rozkladu do vlastních tvarů kmitání. Platí, že součet efektivních hmotností všech vlastních tvarů $m_{\alpha,i}$ v libovolném směru kmitání ($i \equiv x$ nebo $i \equiv y$) je roven celkové hmotnosti systému až na hmotnost, která připadne na podepřené stupně volnosti. Jedním z výstupů programu je celková modální efektivní hmotnost

$$\mathrm{TMEM}_i = \sum_{\alpha=1}^{M} m_{\alpha,i}, \tag{33}$$

kde M představuje počet uvažovaných (vypočtených) vlatních tvarů kmitání. Minimální počet vlastních tvarů se většinou stanoví tak, aby hodnota TMEM_i byla větší než 90% celkové hmotnosti. Pokud je tento součet významně menší mež celková hmotnost, tak to znamená, že tvary, které mají v daném směru významný příspěvek, nebyly určeny.

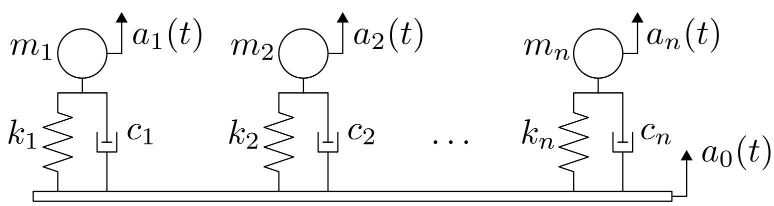
3. Spektrum odezvy - generace umělého akcelerogram

K popisu časového průběhu seismického pohybu slouží akcelerogram, tedy časový průběh zrychlení podloží. V případě rovinného modelu je seismický pohyb popsán pomocí dvou složek akcelerogramu. Jedna složka popisuje zrychlení ve vodorovném směru a druhá ve svislém směru. Dle Eurokódu 8 (EC8) mohou být k popisu seismického pohybu použity akcelerogramy umělé, skutečné nebo simulované.

Skutečné akcelerogramy pocházejí z měření skutečných zemětřesení zaznamenaných seismografickými stanicemi po celém světě. Simulované akcelerogramy se získávají simulacemi, kdy je simulován jak zdroj seismické aktivity, tak i mechanismus šíření zemětřesných vln. Umělými akcelerogramy se budeme zabývat v následující samostatné podkapitole.

3.1. Spektrum pružné odezvy

Spektrem pružné odezvy určitého akcelerogramu se rozumí graf funkce $a(T)$ jejíž funkční hodnota je definována jako maximální hodnota zrychlení harmonického oscilátoru s jedním stupněm volnosti a vlastní periodou T, který je tímto akcelerogramem buzen. Obrázek 7 ukazuje schema fyzikálního modelu, z kterého výpočet spektra odezvy vychází. Každý i-tý oscilátor s hmotností m_i, tuhostí pružného členu k_i a koeficientem viskózního útlumu c_i má vlastní frekvenci $\omega_{0,i} = \sqrt{k_i/m_i}$ a koeficient poměrného útlumu $\xi_i = c_i/(2\sqrt{m_i k_i})$. Předepíšeme-li základně tohoto oscilátoru zrychlení $a_0(t)$, jeho hmota se bude pohybovat se zrychlením $a_i(t)$. Absolutní hodnota maximální hodnoty zrychlení $a_i(t)$ je hodnotou spektra odezvy $S_e(a_i)$ vynesenou pro periodu $T_i = 2\pi/\omega_{0,i}$. Příklad návrhového spektra odezvy zrychlení je uveden na obr. 8.



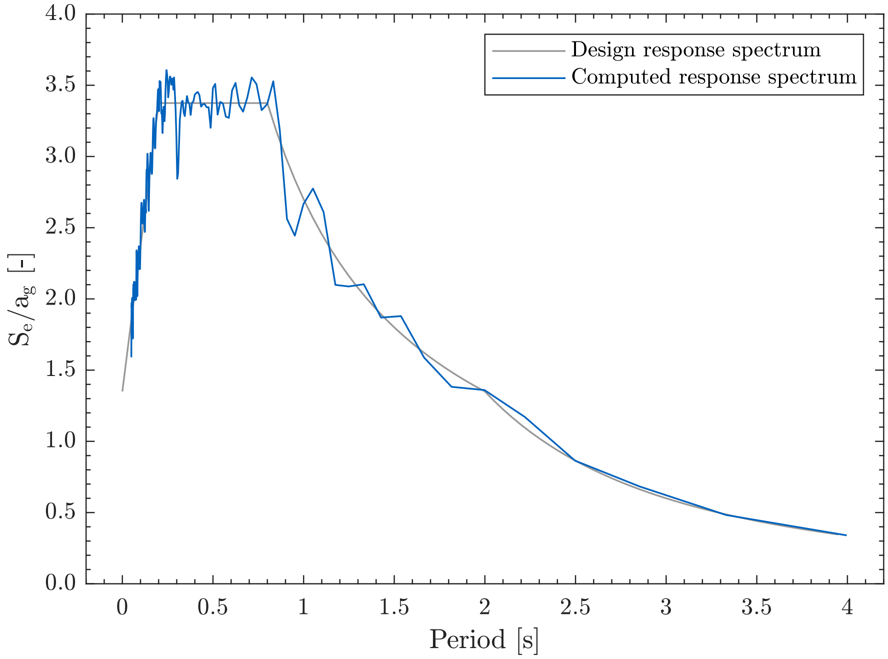
Obrázek 7: Princip výpočtu spektra pružné odezvy: harmonické oscilátory s různými vlastními frekvencemi jsou buzeny akcelerogramem $a_0(t)$ a jsou sledovány jejich odezvy $a_i(t)$.

3.2. Umělé akcelerogramy

Umělý akcelerogram musí být sestaven tak, aby odpovídal spektrum pružné odezvy pro viskózní útlum $\xi = 0{,}05$ definovaný v Eurokódu 8. Eurokód 8 dále určuje minimální dobu trvání a nutný minimální počet různých použitých akcelerogramů použitých při posouzení seismické odezvy konstrukce.

Následující algoritmus pro generování umělých akcelerogramů je převzatý z [13] a skládá se z těchto kroků kroků:

1. Vygeneruje se Fourierovo spektrum s konstantními spektrálními amplitudami a náhodnými fázovými posuny.
2. Pomocí Fourierovy transformace se sestaví časový průběh zrychlení.
3. Pro časový průběh zrychlení se vypočte elastické spektrum odezvy pro systémy s jedním stupněm volnosti, jejichž vlastní frekvence odpovídají frekvencím použitým ve Fourierově spektru.



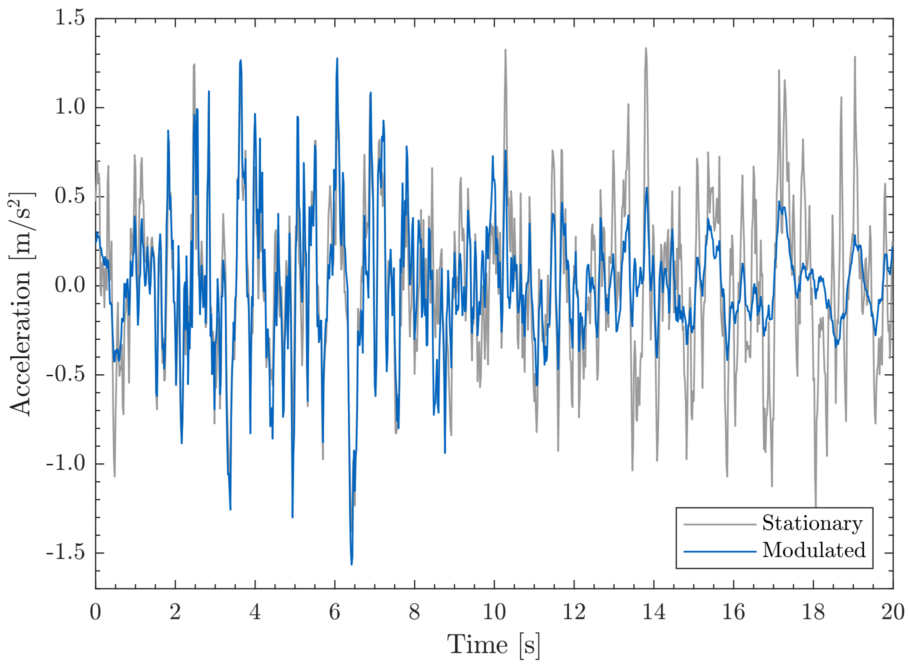
Obrázek 8: Porovnání návrhového elastického spektra odezvy dle EC8 a spektra odezvy vypočteného pro vytvořený časový průběh zrychlení, převzato z [5].

4. Pro každou frekvenci se určí podíl návrhového elastického spektra odezvy dle Eurokódu 8 a spektra odezvy vypočteného pro vytvořený časový průběh zrychlení.
5. Spektrální amplitudy původního Fourierova spektra se upraví na základě podílů získaných v předchozím kroku. Fázové posuny zůstávají beze změny.
6. Kroky 2–5 se opakují pro upravené Fourierovo spektrum, dokud spektrum odezvy vypočtené pro vytvořený časový průběh zrychlení neodpovídá návrhovému elastickému spektru odezvy dle Eurokódu 8 s maximální chybou 10 %, viz obr. 8.

Akcelerogram vygenerovaný výše popsaným algoritmem sice splňuje požadavky uvedené v Eurokódu 8, nicméně je stacionární a postrádá charakteristické fáze průběhu typické pro skutečně měřené zemětřesení, viz stacionární průběh na obr. 9.

Aby umělý akcelerogram získal fázi zvyšování zrychlení, oblast silných otřesů a následný útlum zrychlení, je potřeba vynásobit průběh vygenerovaného stacionárního akcelerogramu obálkovou funkcí $E(t)$ [14]

$$E(t) = at^b e^{-ct}, \tag{34}$$



Obrázek 9: Porovnání stacionárního a nestacionárního uměle vytvořeného akcelerogramu, převzato z [5].

s koeficienty

$$a = \left(\frac{e}{\varepsilon T_w} \right)^b , \tag{35}$$

$$b = \frac{-\varepsilon \ln \mu}{1 + \varepsilon(\ln \varepsilon - 1)} , \tag{36}$$

$$c = \frac{b}{\varepsilon T_w} . \tag{37}$$

kde T_w označuje specifickou délku trvání zemětřesení. Parametr ε určuje v jakém okamžiku specifické doby trvání zemětřesení dosáhne obálková funkce maximální hodnoty. Parametr μ určuje redukční poměr hodnoty obálkové funkce v čase T_w vzhledem k její maximální hodnotě.

Akcelerogram je generován tak, aby rychlost a posun v čase T_w byly nulové, přičemž nulová počáteční rychlost a nulový počáteční posun, které má již stacionární akcelerogram, zůstávají zachovány. Vliv použití obálkové funkce na průběh zrychlení je vidět na příkladu modulovaného akcelerogramu na obr. 9. Další podrobnosti k tématice Eurokódu 8, spektra odezvy a akcelerogramů je možné nalézt v [15, 16]. Podrobnostem týkajících se obálkové funkce uměle vytvořeného akcelerogramu se věnuje [13].

4. Zavedení materiálového útlumu

Nejjednodušším způsobem sestavení materiálové matice tlumení $\mathbf{C}^{\mathsf{M}}$, přijatým také v programu GEO5 MKP, je předpoklad tzv. proporcionálního útlumu. V takovém případě platí, že

$$\mathbf{\Phi}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}^{\mathsf{M}}\mathbf{\Phi} = 2\mathbf{\Omega}^{d}. \tag{38}$$

Matice $\mathbf{\Phi}$ označuje modální matici, tedy matici, jejíž sloupce jsou tvořeny jednotlivými vlastními tvary kmitání konstrukce, viz kapitola 2. Matice $\mathbf{\Omega^d}$ je diagonální a její prvky jsou dány vztahem $\omega_i^d = \xi_i\omega_i$, kde ω_i^d značí frekvenci útlumu a ξ_i koeficient poměrného útlumu příslušný vlastní frekvenci ω_i. V takovém případě jsou vlastní tvary kmitání ortogonální i k matici útlumu $\mathbf{C}^{\mathsf{M}}$. V případě užití metody rozkladu do vlastních tvarů kmitání a vhodně zvoleném vektoru zatížení se rov. (1) rozpadne na soustavu n nezávislých diferenciálních rovnic, kde n je zvolený počet vlastních tvarů, viz kapitola 2, což značně snižuje požadavky na výpočet.

Formulace proporcionálního útlumu (38) je velmi jednoduchá, nicméně předpokládá znalost koeficientů poměrného útlumu ξ_i pro všechny vlastní frekvence. Takový předpoklad je téměř nemožné v praxi splnit, proto je potřeba přidat další hypotézu, která umožní určit hodnoty všech ξ_i na základě pouze několika málo konstant. Z tohoto důvodu je ve většině praktických úloh uvažován Rayleighův útlum, který předpokládá, že matice tlumení $\mathbf{C}^{\mathsf{M}}$ je dána lineární kombinací matice hmotnosti a matice tuhosti ve tvaru

$$\mathbf{C}^{\mathsf{M}} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}, \tag{39}$$

kde α, β jsou parametry poměrného útlumu[6]. Díky tomu, že v programu GEO5 MKP jsou vlastní tvary normované vzhledem k matici hmotnosti, obdržíme přenásobením rov. (39) zleva $\mathbf{\Phi}^{\mathsf{T}}$ a zprava $\mathbf{\Phi}$

$$2\mathbf{\Omega}^{d} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{\Omega}^{2} \longrightarrow 2\omega_i^d = 2\xi_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2, \tag{40}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Jak již bylo řečeno, je matice $\mathbf{\Omega}^{d}$ a tudíž i spektrální matice $\mathbf{\Omega}$, obsahující kvadráty vlastních frekvencí, diagonální.

Z charakteru rov. (40) je zřejmé, že pro výpočet parametrů α, β je postačující znalost dvou vlastních frekvencí ω_i a jím příslušných koeficientů poměrného útlumu ξ_i. Pokud předpokládáme, že obě frekvence ω_a a ω_b jsou tlumeny stejným poměrným útlumem $\xi_a = \xi_b = \xi$, pak parametry

[6] Tyto parametry nemají žádnou souvislost s parametry α, β, γ představenými v podkapitole 1.4.

α a β nabývají hodnot

$$\alpha = \frac{2\xi\omega_a\omega_b}{\omega_a + \omega_b}\,, \qquad \beta = \frac{2\xi}{\omega_a + \omega_b}. \tag{41}$$

Většinou však máme k dispozici pouze jedinou hodnotu poměrného útlumu pro první, nejnižší, vlastní frekvenci ω_1. Přijmeme-li v takovém případě hypotézu, že první vlastní frekvence je tlumena nejméně, pak s využitím rov. (40) dostaneme

$$\frac{d\xi}{d\omega_i} = \frac{1}{2}\Big(-\frac{\alpha}{\omega_i^2} + \beta\Big) = 0. \tag{42}$$

Dosazením $\omega_i = \omega_1$ do rov. (42) získáme vztah

$$\alpha = \omega_1^2\beta, \tag{43}$$

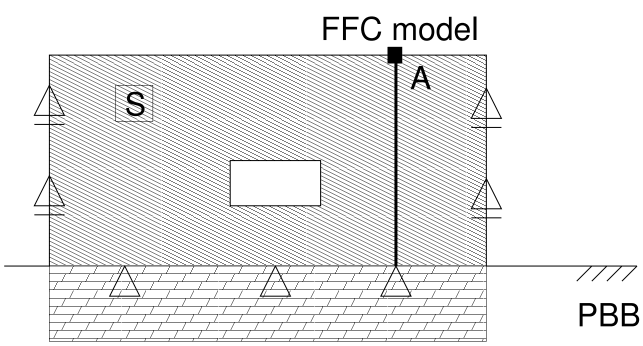
jehož zpětným dosazení do rov. (40) dostaneme

$$\alpha = \xi_1\omega_1\,, \qquad \beta = \frac{\xi_1}{\omega_1}. \tag{44}$$

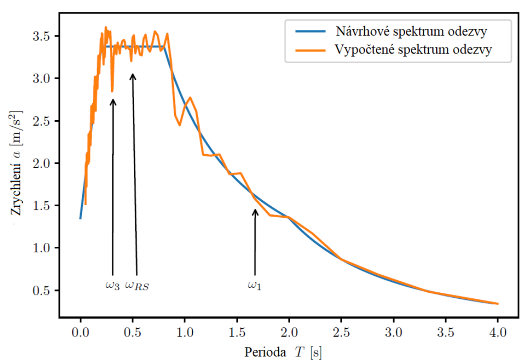
Další podrobnosti jsou uvedeny v [6].

4.1. Příklad výpočtu parametrů α, β

Podrobnosti k prezentovanému příkladu včetně geometrie numerického modelu a materiálových vlastností jednotlivých vrstev podloží jsou uvedeny v [5]. Zde se omezíme pouze na stručný popis možného způsobu výpočtu parametrů Rayleighova útlumu α, β.



(a)



(b)

Obrázek 10: a) Model podloží, b) Spektrum odezvy.

Eurokód 8 uvádí pouze jednu hodnotu poměrného útlumu $\xi = 0.05$ (5%). Zvolený postup výpočtu parametrů α, β ukáže, jak jsou jednotlivé vlastní frekvence vůči zvolené hodnotě parametru ξ tlumeny. Pro ilustraci uvažujme jednoduchý model na obr. 10(a). Účinek materiálového útlumu nejlépe posoudíme při volbě pevných okrajových podmínek na hranici BB (PBB). Abychom měli navíc možnost vztáhnout vlastní frekvence systému k předepsanému zatížení budeme uvažovat akcelerogram na obr. 3 vygenerovaný na základě návrhového spektra odezvy na obr. 10(b), viz kapitola 3.

Zvolený akcelerogram vnáší do systému pouze příčné seismické vlny. Pro výpočet vlastních frekvencí jsme proto volili kinematické okrajové podmínky dle obr. 10(a), připomeňme také kapitolu 2 a obr. 6. Pro výběr čistě smykových módů vlastního kmitání jsme dále využili parametr *Modální faktor podílu vlastního tvaru* $\Gamma_{\alpha,x}$.

Pro ilustraci posoudíme následující tři varianty výpočtu parametrů α, β:

1. Nejméně tlunemená je první vlastní frekvence. K výpočtu využijeme rov. (44).
2. Nejméně tlumené frekvence leží v intervalu první a třetí[7] vlastní frekvence. Třetí vlastní frekvence byla pro řešený příklad zvolena dle doporučení v [10]. K výpočtu využijeme rov. (41).
3. Nejméně tlumené frekvence leží v intervalu první vlastní frekvence a převládající frekvence vstupního akcelerogramu ω_{RS} (návrhového spektra odezvy), viz obr. 10(b). K výpočtu využijeme příslušnou dvojici rovnic (40).

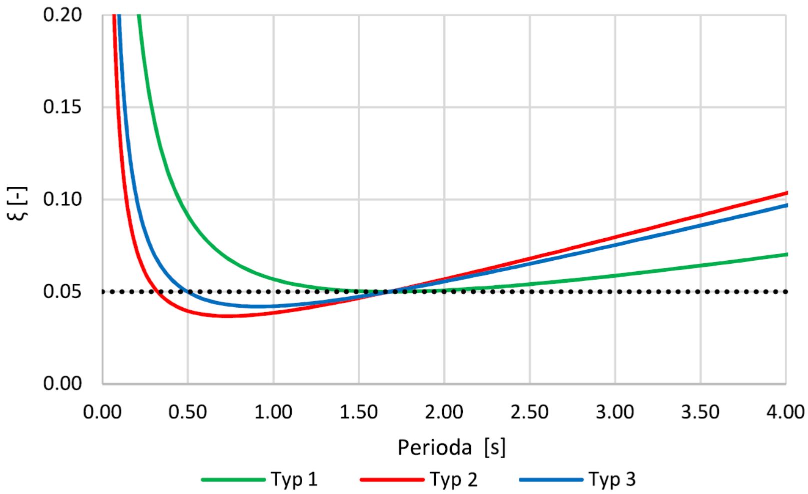
Tabulka 1: Parametry Rayleighova útlumu pro $\xi = 5\%$, převzato z [5].

Type	ω	α	β
Typ 1	ω_1	0.1875	0.0133
Typ 2	$\omega_1 + \omega_3$	0.3143	0.0043
Typ 3	$\omega_1 + \omega_{RS}$	0.2888	0.0061

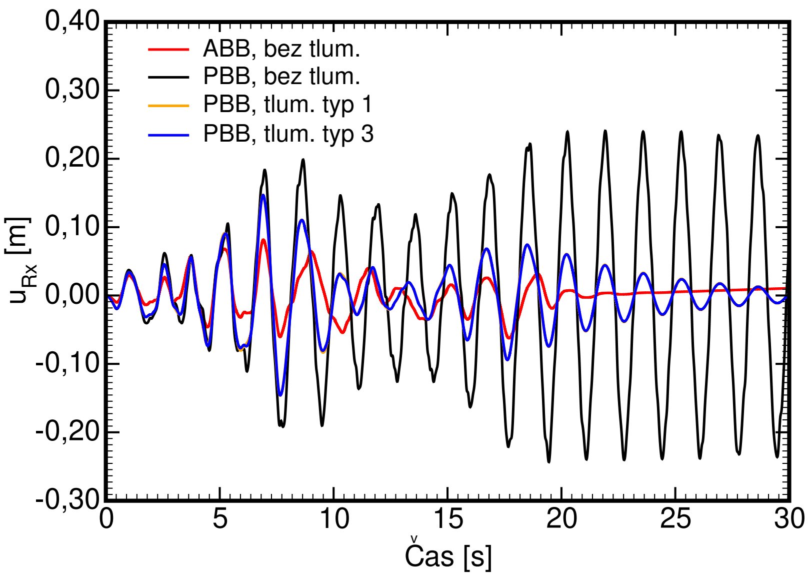
Výsledné hodnoty vlastních frekvencí a parametrů α, β jsou uvedeny v tab. 1. Grafické znázornění výše útlumu vlastních frekvencí je patrné z obr. 11. Je zřejmé, že pěti procenty jsou tlumeny pouze zvolené vlastní frekvence. Z grafů lze vidět nejenom oblast nejméně tlumených frekvencí, ale i to, že nejvíce tlumeny jsou vysoké frekvence vstupního akcelerogramu[8].

[7] Jedná se o třetí vlastní frekvenci ze seznamu frekvencí příslušných pouze smykovým módům kmitání.

[8] Na vodorovné ose je vynesena perioda $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



Obrázek 11: Graf závislosti velikosti poměrného útlumu na vlastní periodě.



Obrázek 12: Porovnání odezvy homogenní vrstvy při použití pevných a absorpčních okrajových podmínek. Posouzení vlivu materiálového útlumu.

Pro zajímavost ještě posoudíme účinek tlumení při použití pevných a absorpčních (ABB) okrajových podmínek. Pro jednoduchost se omezíme na odezvu odpovídající *Free field column* analýze, viz obr. 10(a). Omezíme se opět pouze na účinek horizontální složky zrychlení z obr. 3. Výsledné průběhy relativního vodorovného posunu bodu A na terénu jsou patrné z obr. 12. Účinek materiálového útlumu je zřejmý a při použití PBB podmínek představuje jediný způsob, jak po odeznění zatížení kmitání soustavy utlumit. V případě ABB podmínek nemá materiálový útlum až takový význam. V prezentovaném příkladu nehraje způsob výpočtu parametrů α, β téměř žádnou roli.

5. Postup výpočtu

S předchozího textu je zřejmé, že vlastní výpočet úlohy na účinky zemětření vyžaduje určitou sekvenci výpočtů, a to:

1. **Statický výpočet napjatosti v dané fázi**. Tento krok nastaví počáteční napjatost před zavedení vlasního dynamického zatížení (předepsané zrychlení).
2. **Výpočet vlastních tvarů a vlastních frekvencí**. Výsledkem výpočtu je seznam prvních M vlastních frekvencí v pořadí $\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_M$, kde M je požadovaný počet zadaný uživatelem. V závislosti na nastavení výpočtu může nastat situace, že buď požadovaný počet frekvencí se nepodařilo určit, nebo že některá z vlastních frekvencí byla vynechána. Při použití Jacobiho metody rotací program obecně hledá větší počet než zadaný. Dalším výstupem je tabulka, která každé vlastní frekvenci přiřazuje parametry *Modální faktor podílu vlastního tvaru* a *Modální efektivní motnost vlastního tvaru* pomocí kterých lze určit, který ze základních módů kmitání (kmitání v horizontálním a vertikálním směru) v daném vlastním tvaru kmitání převažuje. V případě, že např. *Modální faktor podílu vlastního tvaru* $\Gamma_{\alpha,x} \approx \Gamma_{\alpha,y}$, tak příspěvek tohoto vlastního tvaru kmitání do obou směrů je přibližně shodný. Vizuální kontrolu lze provést animací příslušného vlastního tvaru. Tato tabulka poskytuje nejen všechny vlastní frekvence určené s cbybou menší než zadanou uživatelem, ale i ty, které byly nalezeny s chybou větší. Chyba příslušná nejvyšší vlastní frekvenci je pro ilustraci uvedena.

   Vypočtené vlastní frekvence lze využít při stanovení parametrů Reyleighova útlumu α, β v případě, že při zadaní se zvolí součinitel poměrného útlumu ξ. Výpočet lze po určení vlastních frekvencí ukončit a zvolený rozsah frekvencí pro stanovení parametrů α, β ověřit, vizuálně nebo číselně, připomeňme kapitolu 4.
3. **Free field column analýza**. Tento výpočet slouží k nastavení časového průběhu statických okrajových podmínek na bočních hranicích modelu, viz podkapitola 1.3. Výpočet na obou hranicích probíhá současně. Materiálové modely v jednotlivých vrstvách, okrajové podmínky na BB hranici, předepsaný záznam zrychlení a časový integrační krok jsou totožné s 2D modelem. Výsledky této analýzy nelze zobrazovat.
4. **Vlastní analýza modelu příslušného dané fázi**. Výsledkem analýzy je časový průběh všech veličin. Program umožňuje zobrazit výsledky ve zvoleném časovém kroku, výsledky krokovat v závislosti na délce integračního kroku, případně výsledky animovat.

Literature

[1] P. Schnabel, J. Lysmer, B. Seed, SHAKE, a computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites, Tech. rep., Earthquake Engineering Re-search Center, University of California, Berkeley. Report No. EERC 72-12 (1972).

[2] L. Mejia, E. Dawson, Earthquake deconvolution for FLAC, in: H. . Varona (Ed.), 4th International FLAC Symposium on Numerical Modeling in Geomechanics, 2006, pp. 4–10.

[3] O. C. Zienkiewicz, N. Bicanic, F. Q. Shen, Generalized Smith boundary – – a transmitting boundary for dynamic computation, Institute for Numerical Methods in Engineering, University College of Swansea 207.

[4] V. Pavelcová, T. Poklopová, T. Janda, M. Šejnoha, The influence of boundary conditions on the response of underground structures subjected to earthquake, Acta Polytechnica CTU Proceedings 15 (2018) 74–80.

[5] V. Pavelcová, T. Poklopová, T. Janda, M. Šejnoha, Influence of material damping on the response of underground structures subjected to earthquake, Acta Polytechnica CTU Proceedings 26 (2020) 64–70.

[6] Z. Bittnar, P. Řeřicha, Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí, SNTL, 1981.

[7] T. Hughes, The Finite Eelement Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice Hall, INC., Englewood Clifts, New Jersey 07632, 1987.

[8] H. Hilber, T. Hughes, R. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 5.

[9] T. Belytschko, An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures, in: T. B. . T. Hughes (Ed.), Computational Methods for Transient Analysis, 1983, pp. 1–65.

[10] R. Brinkgreve, E. Engin, W. Swolfs, Plaxis 2D manual, http://www.plaxis.nl (*Rotterdam, Netherlands, Balkema*, 2017).

[11] O. Pal, Modélisation du comportement dynamique des ouvrages grâce á des éléments finis de haute précision, Ph.D. thesis, L'université Joseph Fourier - Grenoble I. (1998).

[12] Z. Bittnar, J. Šejnoha, Numerical methods in structural engineering, ASCE Press, 1996.

[13] A. Kumar, Software for generation of spectrum compatible time history, in: Proceedings of 13th World Conference on Earthquake Engineering, 2004, pp. 1–6.

[14] D. M. Boore, Stochastic simulation of high-frequency ground motions based on seismological models of the radiated spectra, Bulletin of the Seismological Society of America 73 (6A) (1983) 1865–1894.

[15] J. Máca, K. Pohl, Seizmická odolnost stavebních konstrukcí, https://docplayer.cz/15128735-Seizmicka-odolnost-stavebnich-konstrukci.html, [Online; cit. 2019-11-03] (Workshop 2005 – VZ "Udržitelná výstavba").

[16] L. Janošková, Dynamická analýza konstrukce zatížené seismickým zatížením, diplomová práce, *Vysoké učení technické v Brně* (2013).